Методи за представяне на знания

Лекция 3

Съществува голямо разнообразие от методи за представяне на знания.
Всяко представяне е множество от семантични означения и връзки между тях.

Обща класификация:

1. Логически модели
2. Мрежови модели
3. Продукционни модели
4. Фреймови модели

На логическо ниво се използват основно моделите.
На програмно ниво се работи с езиците ПРОЛОГ, ЛИСП, ОПС-5 и др.

Логическите модели се задават с четворката ЛМ= (E, S, A, B)

- **E – множество от базови елементи**

  Съществуват правила за определяне дали произволен елемент принадлежи или не принадлежи на E.   **П(E).**
- **S – множество от синтактични правила.**

  Чрез тях от елементите на E се образуват синтактично правилни редици (СПР).

  Съществува процедура (крайна), която дава отговор дали конкретна редица е синтактично правилна.
- **A – аксиоми – част от синтактично правилните редове (СПР) – ($A \subseteq S$).**
- **B – множество от правила за извод**
- Чрез прилагане на B към A се получават нови СПР. Ако и към тях се приложат B, то се получават нови СПР и т.н. Получава се множество изводими (доказуеми) в тази система СПР.
- Ако съществува процедура **П(B),** която определя за произволен СПР дали е изводим или не, казва се, че дадената формална система е изводима.

Съждително смятане

- **Съждителното смятане е** сравнително прост **декларативен метод** за представяне на знания.
- **Всяко твърдение**, което има стойност **истина** или **лъжа**, се разглежда като ***съждение***.
- **Всяко съждение** е ***атом*** и се разглежда като неделимо цяло.
- **Атомът** или отрицанието на атома се нарича ***литерал***.

- **Например** простото изречение "**Днес е слънчев ден**" е съждение. За всеки конкретен ден то или е истина(true), или не е истина(false). Нека отбележим това твърдение с ***G.*** Тогава за слънчев ден се записва ***G=*** true, а за ден, в който не грее слънце - ***G=*** false. За отрицанието на ***G*** записът е $\neg$ ***G.***

- **Ограниченост на съждителното смятане**. За да представим ден, в който до обяд е греело слънце, а след обяд е било облачно, трябва да излезем от ограничението на двоичните величини и Булевата алгебра, като използваме многозначна или размита алгебра.

Литералите могат да се свързват посредством отношенията:

- ∨ - *или (дизюнкция),*
- ∧ - *и (конюнкция),*
- ¬ - *не (отрицание),*
- → - *импликация,*
- ≡ - *равнозначност.*

Получените изрази се наричат ***формули. Формулата има истинност, която може да се определи по истинността на включените във формулата литерали.*** Пример е показан в следната таблица, която се нарича таблица на истинност:

Таблица за истинност на съждителните връзки

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
False	False	True	False	False	True	True
False	True	True	False	True	True	False
True	False	False	False	True	False	False
True	True	False	True	True	True	True

***Приоритети** - реда за изпълнение на операциите в по-сложни формули*:
( ), ¬ , ∧, ∨, →, ↔

Интерпретация Всяко присвояване на конкретни стойности на атомите във формула G се нарича нейна **интерпретация**. Интерпретацията бива true или false, ако съответно за това присвояване G е true или false.

<u>Общозначима</u> формула (тавтология) ■ .
G е истина за всичките й интерпретации.

<u>Противоречива</u> формула (противоречие) □**.**
G е лъжа за всичките си интерпретации.

Формулите p и q са еквивалентни тогава и само тогава, когато истинностните им стойности съвпадат за всяка тяхна интерпретация, т.е. когато $p \leftrightarrow q$ е тавтология.

Съществуват кватнорите $\exists$ ***и*** $\forall$ ***:***
За съществуване- $\exists x(P(x))$ – съществува x, за което $P(x)$=true.
За общност - $\forall x\ (P(x))$ – за всяко x $P(x)$ = true.
x се нарича свързана променлива.

<u>Правилата за тъждествено преобразуване на правилно построените формули (ППФ) се наричат закони на съждителното смятане или още логически закони</u>**.**

Правила от Булевата алгебра. Логически закони. Логическите закони са еквивалентни.

Отрицание

$\neg(\neg p) \equiv p;$ $p \vee \neg p \equiv t;$

$p \wedge \neg p \equiv f;$

Повторение

- $p \vee p \equiv p$
- $p \wedge p \equiv p$
- **Дистрибутивност**
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- **Комутативност**
- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- *Еквивалентност*
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Формули на де Морган

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

……………………………………

$p \vee t \equiv t;$ $p \vee f \equiv p$

$p \wedge t \equiv p;$ $p \wedge f \equiv f$

Асоциативност

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$

Импликация

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

За кванторите

$\neg(\forall x (P(x))) \equiv \exists x \neg (P(x))$

$\neg(\exists x (P(x))) \equiv \forall x \neg (P(x))$

Клауза – е **дизюнкция** от краен брой литерали. Клауза, която не съдържа нито един литерал се нарича празна. Празната клауза е винаги лъжа и се означава с □ тя не съдържа никакви литерали, които да са предмет на евентуално удовлетворяване от някаква интерпретация.

Примерна клауза: формула от вида: $(l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee ,..., \vee l_n)$, където всяко l_i е литерал.

Куб – е конюнкция от краен брой литерали.

Пример за куб: формула от вида: $(l_1 \wedge l_2 \wedge l_3 \wedge ,..., \wedge l_n)$, където всяко l_i е литерал.

КНФ: Една формула е в конюнктивна (клаузна) нормална форма когато е представена във вида: $L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge ,..., \wedge L_n$, $n \geq 1$, където всяко L_i е **клауза**.

ДНФ: Една формула е в дизюнктивна нормална форма когато е представена във вида: $L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee ,..., \vee L_n$, $n \geq 1$, където всяко L_i е **куб**.

Преобразуване на формули в нормална форма (НФ).

1. Премахват се ≡ и → (използват се законите за импликация и еквивалентност).
2. Отстраняване на отрицанията (¬) на над повече от един атом, т.е. внасяне на ¬ непосредствено пред атом. (закони 11).
3. Преобразуване чрез използване на останалите закони.

Логическо следствие

Ако формулата $(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \dots \wedge M_k) \to G$ е общозначима, то G е *логическо следствие* на $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$

***G* е логическо следствие** на $M_1, M_2, M_3, \dots, M_p$, тогава и само тогава, когато ■ е логическо следствие на $M_1, M_2, M_3, \dots, M_p, G$.

Ако формулата $(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \dots \wedge M_k \to \neg G)$ е противоречива, то G *е логическо следствие на* $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$.

G е логическо следствие на $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ тогава и само тогава, когато □ е логическо следствие на $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k, \neg G$.

Пример. Привеждане в ДНФ.

$$(\neg p \vee q) \to r \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee r \equiv (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee r \equiv (p \wedge \neg q) \vee r$$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $\quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad \neg(\neg p) \equiv p$

Пример. Привеждане в КНФ.

$(p \wedge (q \to r)) \to s \equiv (p \wedge (\neg q \vee r)) \to s \equiv$ $\quad p \to q \equiv \neg p \vee q$

$\equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee s \equiv$ $\quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\equiv (\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee s \equiv$ $\quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\equiv (\neg p \vee (\neg(\neg q) \wedge \neg r)) \vee s \equiv$ $\quad \neg(\neg p) \equiv p$

$\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s \equiv$ $\quad$ *дистрибутивен*

$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee s \equiv$ $\quad$ *дистрибутивен*

$\equiv ((\neg p \vee q) \vee s) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \vee s) \equiv$ $\quad$ *асоциативен*

$\equiv (\neg p \vee q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$

- **Клауза, която съдържа двойка противоположни литерали** (атом и неговото отрицание) е **тавтология** и може да бъде премахната от една КНФ. Ако в една клауза има повтарящи се литерали, те може да бъдат заменени само с един. След това опростяване се получава т.н. чиста КНФ.

- **Произволна КНФ е тавтология**, ако всички нейни клаузи са тавтологии.

- **Ако в коя да е КНФ се премахнат знаците за конюнкция** между клаузите, тя може да бъде еднозначно представена като множество от клаузи.

  Например КНФ: $(s \vee \neg p \vee q) \wedge (s \vee \neg p \vee \neg r)$ може да се представи като следното множество от литерали: $S=\{(s \vee \neg p \vee q), (s \vee \neg p \vee \neg r)\}$

- Такова представяне улеснява процеса на логическо извеждане, като вместо да се работи с формули **се работи с множества**. Всяка клауза от своя страна също може да бъде представена еднозначно като множество от литерали, след премахване на знака за дизюнкция.
- **Например** представеното горе множество може да се представи още и така: $S=\{\{s , \neg p , q\}, \{s , \neg p , \neg r\}\}$

Правило/Принцип на резолюцията (ПР)– Правило за образуване на резолвенти – схема за разсъждение/извод.

- Нека C_1 и C_2 са две клаузи от някаква КНФ S и нека l е литерал. Нека клаузата C_1 да съдържа съответно литералът l, а C_2 неговото отрицание $\neg l$.
- $l \in C_1, \neg l \ \in C_2$...
- Тогава от двете клаузи можем да премахнем съответно литералът и неговото отрицание и да обединим двете клаузи. Така се получава нова клауза R:

  $R=\{C_1 \backslash \{l\} \cup C_2 \backslash \{\neg l\}\}$

- Тази нова клауза R се нарича резолвента на C_1 и C_2 спрямо l. Двойката $(l, \neg l)$ се нарича допълваща се двойка литерали.Правилото за образуване на резолвенти се нарича правило или принцип на резолюцията.

- Примери:
- 1. Ако: $C_1 = \neg p \vee q \vee r$ и $C_2 = \neg q \vee s$, то $R = \neg p \vee r \vee s$.
- 2. Ако: $C_1 = \neg p \vee q$ и $C_2 = \neg p \vee r$, то резолвента не съществува
- 3. Ако: $C_1 = \neg p$ и $C_2 = p$, то $R=\square$ резолвентата на еднолитерални клаузи е празна клауза.

- Свойство на резолвентите: Коя да е резолвента на две клаузи е логическо следствие на тези две клаузи.

Резолютивен извод/Метод на резолюцията за съждителното смятане. (Робинсън) – доказателство чрез допускане на противното.

-Зададен е набор от истинни твърдения (клаузи в КНФ т.е. имаме дизюнкция от литерали).

-Към тях се добавя отрицанието на доказваното твърдение.

-Избират се две клаузи (твърдения/ дизюнкцията от литерали), които съдържат литерал и неговото отрицание и този литерал и неговото отрицание отпадат в следствие от прилагането на правилото за резолюция.

-Полученият резултат се нарича резолвента. **Резолвентата на две клаузи е следствие от тези клаузи**.

-Получената резолвента се добавя към множеството клаузи.

-Работи се така докато се стигне до противоречие. Противоречие имаме когато се изведе празна резолвента.

Пример:

1. $A \vee \neg B = t$

2. $B \vee C = t$

3. $\neg C = t$

Да се докаже : A = t

Работим с:

1. $A \vee \neg B = t$

2. $B \vee C = t$

3. $\neg C = t$

4. $\neg A = t$

Извод:

От 2 и 3 $\quad (B \vee C) \wedge \neg C = \neg CB \vee \neg CC = B.t = B$

Резолвента (B)

От B и 1 $\quad B \wedge (A \vee \neg B) = BA \vee B \neg B = At = A$

Резолвента (A)

От A и 4 $\quad A \wedge \neg A = f$ празна резолвента - противоречие

$\therefore$ A е доказано

Метод на резолюцията- доказателство чрез допускане на противното.

- Работим с формули представени в чиста КНФ.
- Нека е дадено множество от клаузи S. Като логическо следствие от това множество искаме да изведем формулата C.
- Инвертираме формулата C и я добавяме към множеството клаузи. Тогава ще изследваме противоречивостта на полученото множество или на получената (конюнкция) от клаузи. Т.е. ще направим доказателство чрез допускане на противното. За да докажем че едно твърдение е вярно ще докажем че обратното твърдение (неговото отрицание) не е вярно.
- Прилагаме принципа на резолюцията. Получаваме резолвента R.
- Знаем че конюнкцията на една формула с коя да е нейна резолвента R не променя логически формулата. $S \equiv S \wedge R$, а това може да се запише и така: ($S \cup \{R\}$). Възможно е да се пораждат резолвенти от S и те да се добавят към S. От полученото множество клаузи се получават нови резолвенти и те се добавят отново към S.
- Ако на някоя стъпка в този процес се получи празна клауза то нейното добавяне към предходното множество ще доведе до противоречие: $S^k \wedge \square \equiv \boldsymbol{F}$
- Така стигнахме до опровержение на противното твърдение и следователно твърдението, което искахме да докажем е вярно или е следствие на зададеното множество от клаузи.

Пример 1 от химическия синтез.

<u>Дадено</u>:

$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$

$C + O_2 \rightarrow CO_2$

$CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

Атоми/Литерали са:

MgO, H_2, O_2, и C

A_1: MgO

A_2: H_2

A_3: O_2

A_4: C

A_5: $(MgO \wedge H_2) \rightarrow (Mg \wedge H_2O)$

A_6: $(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2$

A_7: $(CO_2 \wedge H_2O) \rightarrow H_2CO_3$

Трябва да се докаже, че:

***$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \ A_5 \ A_6 \wedge A_7 \wedge \neg (H_2CO_3)$ е противоречива*.**

От това доказване ще следва изводимостта на солната киселина от посочените химични реакции.

Нека преобразуваме в КНФ:

$$(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge ((MgO \wedge H_2) \rightarrow (Mg \wedge H_2O)) \wedge$$
$$((C \wedge O_2) \rightarrow CO_2) \wedge ((CO_2 \wedge H_2O) \rightarrow H_2CO_3) \wedge \neg(H_2CO_3) =$$

$$(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge (\neg(MgO \wedge H_2) \vee (Mg \wedge H_2O)) \wedge$$
$$(\neg(C \wedge O_2) \vee CO_2) \wedge (\neg(CO_2 \wedge H_2O) \vee H_2CO_3) \wedge \neg(H_2CO_3) =$$

$$(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge [(\neg MgO \vee \neg H_2) \vee (Mg \wedge H_2O)] \wedge$$
$$[(\neg C \vee \neg O_2) \vee CO_2)] \wedge [(\neg CO_2 \vee \neg H_2O) \vee H_2CO_3] \wedge \neg(H_2CO_3) =$$

Номерираме получените литерали както следва:

$$\underbrace{(MgO)}_{1} \wedge \underbrace{(H_2)}_{2} \wedge \underbrace{(C)}_{3} \wedge \underbrace{(O_2)}_{4} \wedge \underbrace{(\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg)}_{5} \wedge \underbrace{(\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O)}_{6} \wedge$$

$$\underbrace{(\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2)}_{7} \wedge \underbrace{(\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3)}_{8} \wedge \underbrace{\neg (H_2CO_3)}_{9}$$

1 2 3 4 5 6

$(MgO) \wedge (H_2) \wedge (C) \wedge (O_2) \wedge (\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg) \wedge (\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O) \wedge$

7 8 9

$(\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2) \wedge (\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3) \wedge \neg (H_2CO_3)$

Решението се намира в следната последователност:

- 10. От 8 и 9 се получава $(\neg CO_2 \vee \neg H_2O)$.
- 11. От 10 и 7 се получава $(\neg C \vee \neg O_2 \vee \neg H_2O)$.
- 12. От 11 и 6 се получава $(\neg (MgO) \wedge \neg H_2 \vee \neg C \vee \neg O_2)$.
- 13. От 12 и 1 се получава $(\neg H_2 \vee \neg C \vee \neg O_2)$.
- 14. От 13 и 2 се получава $(\neg C \vee \neg O_2)$.
- 15. От 14 и 3 се получава $(\neg O_2)$.
- 16. От 15 и 4 се получава $\square$

С това противоречивостта на противното твърдение е доказана и следователно от тези вещества и химични реакции може да се синтезира солна киселина.

Пример 2.

- ***Ако Иван се е подготвил за изпита, то той отива на кино с Жени, освен ако отдавна не е ходил на кино и Жени много настоява или филмът е много хубав.***
- ***Ще отиде ли Иван на кино, ако скоро е бил на кино, но Жени много настоява?***

- **A_1:** Иван се е подготвил за изпита.
- **A_2:** Иван отива на кино.
- **A_3:** Иван отдавна не е ходил на кино.
- **A_4:** Жени много настоява.
- **A_5:** Филмът е много хубав.

- **При преобразуването на първия абзац са възможни два варианта:**
- **а) $A_1 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee A_5 \equiv A_2$;** **б) $A_1 \vee A_3 \wedge (A_4 \vee A_5) \equiv A_2$;**

- **Преобразуване на втория абзац:**
- **$(\neg A_3 \wedge A_4) \rightarrow A_2$**

- **Да продължим с преобразуването на първия вариант (а).**

- **Преобразуваме първия абзац:**
- **а) $A_1 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee A_5 \equiv A_2$;**

- $(\neg (A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4)) \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee \neg A_2) =$
- $(\neg A_1 \wedge \neg A_5 \wedge \neg (A_3 \wedge A_4) \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee (A_3 \wedge A_4) \vee \neg A_2) =$
- $((\neg A_1 \wedge \neg A_5 \wedge (\neg A_3 \vee \neg A_4)) \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee (A_3 \wedge A_4)) =$
- Получават се следните **пет дизюнкта**:

$$\underbrace{(\neg A_1 \vee A_2)}_{1} \wedge \underbrace{(\neg A_5 \vee A_2)}_{2} \wedge \underbrace{(\neg A_3 \vee \neg A_4 \vee A_2)}_{3} \wedge \underbrace{(A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_3)}_{4} \wedge$$

$$\underbrace{(A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_4)}_{5}$$

Преобразуваме втория абзац:

$(\neg A_3 \wedge A_4) \to A_2$

След инвертиране той добива вида:

$\neg ((\neg A_3 \wedge A_4) \to A_2)$

Следва преобразуване:

$\neg (\neg (\neg A_3 \wedge A_4) \vee A_2) = \neg ((\neg \neg A_3 \vee \neg A_4) \vee A_2) =$

$\neg ((A_3 \vee \neg A_4) \vee A_2) = \neg (A_3 \vee \neg A_4) \wedge \neg A_2 =$

$(\neg A_3 \wedge A_4) \wedge \neg A_2 = \neg A_3 \wedge A_4 \wedge \neg A_2$

Получават се следните три дизюнкта:

6 7 8

$\neg A_3 \wedge A_4 \wedge \neg A_2$

- Дизюнкти от първи абзац:

$$\overset{1}{(\neg A_1 \vee A_2)} \wedge \overset{2}{(\neg A_5 \vee A_2)} \wedge \overset{3}{(\neg A_3 \vee \neg A_4 \vee A_2)} \wedge \overset{4}{(A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_3)} \wedge$$

$$\overset{5}{(A_1 \vee A_5 \vee \neg A_2 \vee A_4)}$$

- Дизюнкти от втори абзац:

$$\overset{6}{\neg A_3} \wedge \overset{7}{A_4} \wedge \overset{8}{\neg A_2}$$

- Следва логически извод:
- 9. От 3 и 8 резолвентата е $(\neg A_3 \vee \neg A_4)$.
- 10. От 9 и 7 резолвентата е $(\neg A_3)$.
- 11. От 4 и 1 резолвентата е $(A_5 \vee A_3)$
- Тъй като няма възможност да се стигне до противоречие, то изводът на A_2 не е следствие от твърденията в първия и втория абзаци. Т.е. Иван няма да иде на кино.